Title	Willmore 予想およびその書き換え : E^3 にはめこまれたトーラス上のDirac 作用素およびその複素 Fermi 曲線(部分多様体論のさらなる発展にむけて)
Author(s)	安藤, 直也; 谷口, 哲也
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1527: 74-99
Issue Date	2007-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/58888
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 74-99

Willmore予想およびその書き換え

~ E^3 にはめこまれたトーラス上の Dirac 作用素およびその複素 Fermi 曲線 ~

熊本大学・大学院自然科学研究科 安藤 直也 (Naoya Ando)
Graduate School of Science and Technology
Kumamoto University

北里大学・一般教育部 谷口 哲也 (Tetsuya Taniguchi)
College of General Education
Kitasato University

1 はじめに

本稿は Willmore 予想をめぐる最近の動向に関する概説 (サーベイ) である.

E^3 にはめこまれたトーラスに対する Willmore 汎関数の値 (平均曲率の2乗の積分) は $2\pi^2$ 以上でありかつ等号成立は S^3 の Clifford トーラスの立体射影による像と E^3 において共形同値であるときに限ることが期待されている. これは Willmore 予想として知られている.

Willmore 予想については, まず Willmore が回転トーラスに対する Willmore 汎関数を考察した ([Wi1]). また Willmore および Shiohama-Takagi は空間曲線の管状近傍の境界と表されるトーラスに限定すると Willmore 予想が正しいことを示した ([Wi2], [S-T]). Weiner は Willmore 汎関数の第2変分公式を求め, そして Willmore 汎関数に関して Clifford トーラスは安定であることを示した ([We]). Li-Yau は共形構造が Clifford トーラスのものに近いトーラスに対し Willmore 予想が正しいことを示し ([L-Y]), Montiel-Ros は Li-Yau の手法に立脚してより多くの共形構造に対し Willmore 予想が正しいことを示した ([M-R]). L. Simon は E^3 にはめこまれた全てのトーラスに対する Willmore 汎関数の値の下限を達成するトーラスが存在することを示した ([Si1], [Si2]).

一方, M. U. Schmidt によって Willmore 予想は正しいと主張する論文 [Sc1] が発表されたが, [Sc1] においては E^3 の曲面について直接考察するのではなく複素 Fermi 曲線と呼ばれるものを考察することによって元々の問題を扱おうとしている. 本稿の目的は E^3 のトーラスと複素 Fermi 曲線の対応について説明することである. まず Konopelchenko や Taimanov によって考案された一般の曲面に対する表現公式 ([Ko], [T3]) に注目する: E^3 のトーラス上に Dirac 方程式およびその解が見い出され, 逆に複素平面 $\mathbf{C}$ 上ポテンシャルが実数値でありかつ2重周期的である Dirac 方程式および幾つかの周期条件を満たす $\mathbf{C}$ 上

の解から E^3 のトーラスを構成できる (一般の曲面に対する表現公式としては平均曲率とGauss 写像の観点での Kenmotsu の表現公式 ([Ken]) が以前から知られている). この表現公式が [Sc1] の出発点であり, 考察の対象は E^3 のトーラスそのものから Dirac 方程式へとうつる. 特にトーラスに対する Willmore 汎関数の値は対応する Dirac 作用素のポテンシャルの L^2 ノルムの 4 倍と表される. 第 2 節において, 以上について詳しく説明する.

複素平面 $\mathbf{C}$ 上ポテンシャルが 2 重周期的である Dirac 作用素についてはその Bloch 関数とよばれるものを考えることができる (Floquet 関数ともよばれる). Bloch 関数とは Dirac 作用素の準周期的な固有関数のことであり, 準運動量 (quasimomentum) と呼ばれる $\mathbf{C}^2$ の元が付随している. Dirac 作用素に対し, その核に含まれる全ての Bloch 関数の準運動量からなる集合 ($\mathbf{C}^2$ の部分集合) は Dirac 作用素の 複素 Fermi 曲線 と呼ばれる. E^3 のトーラス上の Dirac 作用素は必ず Bloch 関数を持ち, 従ってその複素 Fermi 曲線は空集合ではない. ポテンシャルが有界である場合, Dirac 作用素の複素 Fermi 曲線は $\mathbf{C}^2$ の解析的集合である ([T3]). 第 3 節において, 以上について詳しく説明する.

第 3 節において, トーラス上の 2 重周期的なポテンシャルを持つ Dirac 作用素 D に対しては, Bloch 関数を経由して, 複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(V,W)$ が定義される. 複素 Fermi 曲線は $\mathbf{C}^2$ の解析的集合であるが 格子 Λ の双対格子 Λ^* の作用により不変である. そこで $\mathcal{F}(V,W)$ の Λ^* による商 $\mathcal{F}(V,W)/\Lambda^*$ を考えたとき, この正規化があるコンパクトリーマン面 Y からある 2 点 ∞^-, ∞^+ を除去したものと同型となることがある. このとき $\mathcal{F}(V,W)$ に属する (k_1,k_2) は $Y\setminus\{\infty^-,\infty^+\}$ 上の $\mathbf{C}^2$ に値を取る多価関数とみなせることに注意する. 逆にある性質もつ, 2 点付きのコンパクトリーマン面 Y とその上の $\mathbf{C}^2$ に値を取る多価関数 $k\colon Y\to\mathbf{C}^2$ の組 (Y,∞^-,∞^+,k) から Dirac 作用素の Λ に関して 2 重周期的な有限型ポテンシャル (V,W) を構成することができる. さらにこのポテンシャルに対応する複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(V,W)$ のなかに, k による $Y\setminus\{\infty^-,\infty^+\}$ の像が含まれていることがわかる. 第 4 節ではこれを説明する.

本稿の関連文献として [O-O-U], [Mo] がある. [Sc1] において Schmidt は本稿で説明される内容に続いて複素 Fermi 曲線のモジュライ空間の構成を行ない, そしてその上で Willmore 汎関数の振る舞いを考察し Willmore 予想を解決しようとしている. 大仁田義裕氏, 乙藤隆史氏および宇田川誠一氏による文献 [O-O-U] は複素 Fermi 曲線のモジュライの構造および Willmore 汎関数の振る舞いについての精力的な分析である. また [Sc2] において Schmidt は与えられた Riemann 面から E^3 もしくは E^4 への共形写像で Willmore 汎関数の値を Riemann 面の共形類の中で最小にするものが存在することを主張しているが, このことを示すために共形写像等の四元数的定式化に立脚した議論が行なわれている ([Sc1]

では E^3 への共形的なはめこみに関して同様の結果を示すために複素 Fermi 曲線のモジュライを考察する). 守屋克洋氏による [Mo] は [Sc2] における主張とそのために必要な議論を解説するものである.

2 曲面の表現公式

2.1 一般論

O を複素平面 $\mathbf{C}$ の単連結な領域とし, U を O 上の滑らかな実数値関数とする. そして

$$\partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad D_U := \begin{pmatrix} U & \partial \\ -\overline{\partial} & U \end{pmatrix}$$

とおく. $\Psi := {}^t(\psi_1, \psi_2)$ は O 上の滑らかな $\mathbf{C}^2$-値関数で Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ を満たすものとする.

命題 2.1 O 上の 1 形式

$$\omega_1 := \mathrm{Re}\big(\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\overline{z}\big), \qquad \omega_2 := \mathrm{Im}\big(\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\overline{z}\big), \qquad \omega_3 := \psi_1\overline{\psi}_2 dz + \overline{\psi}_1\psi_2 d\overline{z}$$

は閉である.

証明 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
2d\omega_1 &= \big\{\partial\big(\overline{\psi}_1^2 - \psi_2^2\big) - \overline{\partial}\big(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2\big)\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 2\big\{\overline{\psi}_1\partial\overline{\psi}_1 - \psi_2\partial\psi_2 - \psi_1\overline{\partial}\psi_1 + \overline{\psi}_2\overline{\partial}\overline{\psi}_2\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 2\big\{\overline{\psi}_1 \times \overline{U\psi_2} - \psi_2 \times (-U\psi_1) - \psi_1 \times U\psi_2 + \overline{\psi}_2 \times \big(-\overline{U\psi_1}\big)\big\} dz \wedge d\overline{z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって ω_1 は閉である. 同様に ω_2 も閉であることがわかる. ω_3 が閉であることは $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ および U が実数値関数であることを用いて示される. □

注意 U が複素数値関数でありしかし実数値関数であるとは限らない場合, ω_1, ω_2 はやはり閉であるが, ω_3 は閉であるとは限らない.

O は単連結であるので, 命題 2.1 および Poincaré の補題から ω_i は O 上の完全形式であることがわかる: O の固定された 1 点 z_0 および O の各点 z に対し C を O 内で z と z_0 を結ぶ曲線とする (向きは z_0 から z へのものとする) とき, ω_i の C に沿う線積分の値は終点 z

にのみ依存しCの選び方には依らない．そこで

$$\iota_k(z,\overline{z}) := \int_C \omega_k, \qquad \iota(z,\overline{z}) := (\iota_1(z,\overline{z}),\ \iota_2(z,\overline{z}),\ \iota_3(z,\overline{z}))$$

とおく．

定理 2.2 ([T3]) ιはOからE^3への滑らかな共形写像である．さらにO上$\Psi \neq {}^t(0,0)$が成り立つならば，

(a) ιははめこみである；

(b) ιが導く計量gは$g = e^{2\alpha}dzd\overline{z}$で与えられる，但し$\alpha := \log\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$である；

(c) ιに関する平均曲率は$-2Ue^{-\alpha}$で与えられる．

証明 まず

$$\partial\iota\cdot\partial\iota = \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2 - 2\sqrt{-1}\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y}\right)$$

が成り立つ．一方ιの定義から，

$$\partial\iota\cdot\partial\iota = \frac{1}{4}(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2)^2 - \frac{1}{4}(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2)^2 + \psi_1^2\overline{\psi}_2^2 = 0$$

を得る．よってιは共形写像である．また

$$\partial\iota\cdot\overline{\partial}\iota = \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\iota}{\partial x}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\iota}{\partial y}\right|^2$$

が成り立ち，一方ιの定義から，

$$\partial\iota\cdot\overline{\partial}\iota = \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)^2$$

を得る．よってO上$\Psi \neq {}^t(0,0)$が成り立つならば，ιははめこみである．$\alpha := \log\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$とおくと，$\iota$が導く計量は$e^{2\alpha}dzd\overline{z}$と表されることがわかる．また

$$\partial\iota\times\overline{\partial}\iota = \frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial\iota}{\partial x}\times\frac{\partial\iota}{\partial y}$$

が成り立ち，一方ιの定義から，

$$\partial\iota\times\overline{\partial}\iota = -\frac{\sqrt{-1}e^{\alpha}}{2}\left(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$$

を得る．よって

$$\frac{\partial\iota}{\partial x}\times\frac{\partial\iota}{\partial y} = -e^{\alpha}\left(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right)$$

を得る. よって ι に関する単位法ベクトル場 ν は

$$\nu = -e^{-\alpha}\big(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)$$

で与えられる. ι に関する平均曲率 H は $H = 2e^{-2\alpha}\big(\partial\overline{\partial}\iota\big)\cdot\nu$ で与えられるが, ι の定義および $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ から,

$$\partial\overline{\partial}\iota = U\big(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2\big)$$

がわかるので, $\big(\partial\overline{\partial}\iota\big)\cdot\nu = -Ue^{\alpha}$ を得る. よって $H = -2e^{-\alpha}U$ を得る. □

注意 $U\equiv 0$ とするとき, Ψ は $\overline{\partial}\psi_1 = 0$ および $\partial\psi_2 = 0$ を満たす. よって ψ_1 および $\overline{\psi}_2$ は z の正則関数である. O 上の関数 f, g を $f := -\overline{\psi}_2^2$, $g := -\psi_1/\overline{\psi}_2$ とおくと, 極小曲面に対する Enneper-Weierstrass の表現公式

$$\iota(z) = \mathrm{Re}\left(\int_C f(1-g^2)dz,\ \sqrt{-1}\int_C f(1+g^2)dz,\ 2\int_C fgdz\right)$$

を得る. よって定理 2.2 は極小曲面に対する Enneper-Weierstrass の表現公式の一般化である.

定理 2.3 ([T3]) $\iota : O \longrightarrow E^3$ を共形的なはめこみとする. ι が導く計量 g を $g = e^{2\alpha}dzd\overline{z}$ とし, ι に関する平均曲率を H とする. このとき $U := -He^{\alpha}/2$ に対し, Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ および $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を満たす滑らかな $\mathbf{C}^2$-値関数 Ψ が存在して対応する O から E^3 への写像が ι と E^3 の平行移動との合成と表される.

証明 ι は共形写像であるので, $\partial\iota\cdot\partial\iota = 0$ が成り立つ. これは

$$(\partial\iota_1)^2 + (\partial\iota_2)^2 + (\partial\iota_3)^2 = 0 \tag{1}$$

と同値である. $F := \iota_1 + \sqrt{-1}\iota_2$ とおく. このとき O の点 p で, $\big(\partial F, \overline{\partial}F\big) = (0,0)$ が成り立つことと $(\partial\iota_1, \partial\iota_2) = (0,0)$ が成り立つことは同値である. $(\partial\iota_1,\partial\iota_2) = (0,0)$ が成り立つならば ι ははめこみではない. よって O 上 $\big(\partial F, \overline{\partial}F\big) \neq (0,0)$ が成り立つ. (1) から, $(\partial F)\big(\partial\overline{F}\big) = -(\partial\iota_3)^2$ がわかる. よって $\partial\iota_3 \neq 0$ が成り立つ点の近傍上 $\psi_1^2 = \partial F$ および $\psi_2^2 = -\overline{\partial}F$ を満たす 1 価複素数値関数 ψ_1, ψ_2 が存在する. さらに, $\partial\iota_3 = 0$ が成り立つ点 p の近傍上においても, このような ψ_1, ψ_2 は存在する: 仮に p で $\partial F = 0$ が成り立つとすると p で $\overline{\partial}F \neq 0$ が成り立つので, p のある近傍上 $\partial F = -(\partial\iota_3)^2/\partial\overline{F}$ が成り立ちよって上のような ψ_1, ψ_2 が存在する. O は単連結であるので, O 上 1 価な $\mathbf{C}^2$-値関数 $\Psi := {}^t(\psi_1,\psi_2)$ で $\Psi \neq {}^t(0,0)$, $\psi_1^2 = \partial F$ および $\psi_2^2 = -\overline{\partial}F$ を満たすものが存在することがわかる. Ψ に対

し ω_i を命題 2.1 の中でのように定義するとき, ω_i を線積分することによって得られる写像は予め与えられている ι と E^3 のある平行移動の合成に等しい: はめこみ ι に対し,

$$\partial\iota_1 = \frac{1}{2}(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2), \qquad \partial\iota_2 = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2) \tag{2}$$

が成り立つので, ι_1 と

$$\int_C \omega_1 = \mathrm{Re}\int_C (\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2)dz$$

の差および ι_2 と

$$\int_C \omega_2 = \mathrm{Im}\int_C (\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2)dz$$

の差は終点 z によらないことがわかる; また ι_3 については, $(\partial\iota_3)^2 = \psi_1^2\overline{\psi}_2^2$ であることから (必要ならば ψ_2 を $-\psi_2$ にとりかえることによって) $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ を得るので, ι_3 と

$$\int_C \omega_3 = 2\mathrm{Re}\int_C \psi_1\overline{\psi}_2 dz$$

の差は終点 z によらない. 以上のような Ψ が Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ を満たすことを示したい. まず $\psi_2 \neq 0$ が成り立つ点の近傍で考える. $\psi_2^2 = -\overline{\partial}F$ を用いて, 次を得る:

$$\partial\psi_2 = -\frac{\partial\overline{\partial}\iota_1 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\iota_2}{2\psi_2}. \tag{3}$$

また

$$\begin{aligned} U\psi_1 &= -\frac{He^{\alpha}}{2}\psi_1 \\ &= -e^{-\alpha}\psi_1(\partial\overline{\partial}\iota)\cdot\nu \\ &= e^{-2\alpha}\psi_1(\partial\overline{\partial}\iota_1,\ \partial\overline{\partial}\iota_2,\ \partial\overline{\partial}\iota_3)\cdot(2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2),\ 2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2),\ -|\psi_1|^2+|\psi_2|^2) \\ &= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\{2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + 2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_2 \\ &\qquad + \psi_1\psi_2(-|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)\partial\overline{\partial}\iota_3\} \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ. ここで(1) から

$$(\partial\iota_3)\partial\overline{\partial}\iota_3 = -(\partial\iota_1)\partial\overline{\partial}\iota_1 - (\partial\iota_2)\partial\overline{\partial}\iota_2$$

がわかるが, (2) および $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ に注意して,

$$\psi_1\overline{\psi}_2\partial\overline{\partial}\iota_3 = -\frac{1}{2}(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_2 \tag{5}$$

を得る. (4) の右辺第 3 項に(5) を代入すると,

$$
\begin{aligned}
U\psi_1 = \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{ & 2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + 2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2)\partial\overline{\partial}\iota_2 \\
& + \psi_1^2\Big(\frac{1}{2}(\overline{\psi}_1^2 - \psi_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\overline{\psi}_1^2 + \psi_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big) \\
& + \psi_2^2\Big(-\frac{1}{2}(\psi_1^2 - \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}(\psi_1^2 + \overline{\psi}_2^2)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big)\Big\} \\
= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{ & \Big(2\psi_1\psi_2\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2) + \frac{1}{2}|\psi_1|^4 - \psi_1^2\psi_2^2 + \frac{1}{2}|\psi_2|^4\Big)\partial\overline{\partial}\iota_1 \\
& + \Big(2\psi_1\psi_2\mathrm{Im}(\psi_1\psi_2) + \frac{\sqrt{-1}}{2}|\psi_1|^4 + \sqrt{-1}\psi_1^2\psi_2^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}|\psi_2|^4\Big)\partial\overline{\partial}\iota_2\Big\} \\
= \frac{e^{-2\alpha}}{\psi_2}\Big\{ & \frac{1}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\partial\overline{\partial}\iota_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\partial\overline{\partial}\iota_2\Big\} \\
= \frac{1}{2\psi_2} & (\partial\overline{\partial}\iota_1 + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\iota_2) \\
= -\partial\psi_2 &
\end{aligned}
$$

を得る, 但し最後の等式は(3) による. $\psi_2 = 0$ が成り立つ点 p の近傍でも $U\psi_1 = -\partial\psi_2$ を示すことができる: (4) に注意すると p で $U\psi_1 = -\partial\overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ が成り立ち, 一方 p の近傍上で $\psi_2 = \overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ が成り立つので p で $\partial\psi_2 = \partial\overline{\partial}\iota_3/\overline{\psi}_1$ を得る. 以上と同じやり方で, $\overline{\partial}\psi_1 = U\psi_2$ を得る. □

系 2.4 Λ を $\mathbf{C}$ の格子とし, $\iota : \mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow E^3$ を共形的なはめこみとする. このとき ι に対する Willmore 汎関数の値は ι に対して定理 2.3 の中でのように定まる Dirac 作用素のポテンシャル U の L^2 ノルムの 4 倍に等しい.

証明 ι が導く計量を $g = e^{2\alpha}dzd\overline{z}$ と表すと, g に関する面積要素は $dA = e^{2\alpha}dxdy$ で与えられる. また ι に関する平均曲率を H とするとき $U := -He^{\alpha}/2$ とおくと, ι に対する Willmore 汎関数の値は

$$\mathcal{W}(\iota) = \int_{\mathbf{C}/\Lambda} H^2 dA = 4\int_{\mathbf{C}/\Lambda} U^2 dxdy$$

と表される. よって ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ は Dirac 作用素 D_U のポテンシャル U の L^2 ノルムの 4 倍に等しい. □

系 2.5 Λ, ι および U を系 2.4 の中でのようなものとし, Ψ は $\mathbf{C}$ 上 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を満たす滑らかな $\mathbf{C}^2$-値関数で対応する $\mathbf{C}$ から E^3 への写像が ι と E^3 の平行移動との合

成と表されるようなものとする．このとき任意の $z \in \mathbf{C}$ および任意の $\gamma \in \Lambda$ に対し $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ，但し $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \{1, -1\}$ は Λ から 2 元 $1, -1$ からなる群 $\{1, -1\}$ への準同形写像である ($\gamma, \gamma' \in \Lambda$ に対し $\varepsilon(\gamma)\varepsilon(\gamma') = \varepsilon(\gamma+\gamma')$ が成り立つ)．

証明 ι_k は Λ に関して周期的であり，そして ψ_1, ψ_2 は(2) および $\partial\iota_3 = \psi_1\overline{\psi}_2$ を満たすことに注意して，系 2.5 を得る． □

系 2.6 Λ を $\mathbf{C}$ の格子とし，U は $\mathbf{C}$ 上の滑らかな実数値関数で Λ に関して周期的であるとする．Ψ は $\mathbf{C}$ 上滑らかな $\mathbf{C}^2$-値関数で $D_U\Psi = {}^t(0,0)$, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ を満たしさらに任意の $z \in \mathbf{C}$ および任意の $\gamma \in \Lambda$ に対し $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つとする，但し ε は Λ から $\{1, -1\}$ への準同形写像である．このとき Ψ および U から構成される $\mathbf{C}$ から E^3 への写像 ι が $\mathbf{C}/\Lambda$ から E^3 への写像として well-defined であるための必要十分条件は Λ に関して同値な 2 点を端点とする曲線 C に沿う ω_i の線積分が 0 になることである．

2.2 回転面の場合

[T2] を参考にして，E^3 の回転面に対し定理 2.3 の中でのように定まるポテンシャル U および Dirac 方程式 $D_U\Psi = {}^t(0,0)$ の解 $\Psi \neq {}^t(0,0)$ について考察したい．

E^3 の回転面は次のような写像による像と合同である:

$$\iota(x, y) := (f(y)\cos x,\ f(y)\sin x,\ g(y)),$$

但し f, g は開区間 $I \subset \mathbf{R}$ 上の滑らかな関数で，$f > 0$ および $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ を満たす．直ちに

$$\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial x} = f^2, \qquad \frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\iota}{\partial y}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial y} = (f')^2 + (g')^2$$

がわかる．$\tilde{y}$ は $y \in I$ の関数で，$d\tilde{y}/dy = \sqrt{(f')^2 + (g')^2}/f$ を満たすとする．このとき $(x, \tilde{y})$ は ι による像の局所座標であり，

$$\frac{\partial\iota}{\partial x}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial x} = \frac{\partial\iota}{\partial\tilde{y}}\cdot\frac{\partial\iota}{\partial\tilde{y}} = f^2$$

が成り立つ．以下においては，この座標を (x, y) で表す．こうして ι は共形的なはめこみとみなされ，複素変数 $z := x + \sqrt{-1}y$ を得る．また関数 f や g の微分は新しく取り直した変数 y に関するものであるとする．このとき $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ が成り立つ．ι に関する単位法ベクトル ν は

$$\nu(x, y) = \frac{1}{f(y)}(g'(y)\cos x,\ g'(y)\sin x,\ -f'(y))$$

で与えられる. ι に関する平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2f^2}\left(\frac{\partial^2 \iota}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \iota}{\partial y^2}\right)\cdot \nu$$

で与えられるので,

$$H(x,y) = -\frac{f'(y)g''(y) + g'(y)(f(y) - f''(y))}{2f(y)^3}$$

がわかる (x に依らない). よってポテンシャル $U = -Hf/2$ は

$$U(x,y) = \frac{f'(y)g''(y) + g'(y)(f(y) - f''(y))}{4f(y)^2} \tag{6}$$

と表される (x に依らない). 定理 2.3 の証明の中でのように, ι の第 1 成分と第 2 成分を用いて関数 F を $F(x,y) := e^{\sqrt{-1}x}f(y)$ とおく. このとき

$$\partial F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(f(y) - f'(y)), \qquad \bar{\partial} F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(f(y) + f'(y)) \tag{7}$$

を得る. よって ∂F と $\bar{\partial} F$ は同時に 0 になることは無い. $\partial F = 0$ が成り立つ点はちょうど $f = f'$ が成り立つ点であり, そしてこのような点の近傍では ∂F は

$$\partial F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\frac{g'(y)^2}{f(y) + f'(y)}$$

と表される. 同様に $\bar{\partial} F = 0$ が成り立つ点はちょうど $f = -f'$ が成り立つ点であり, そしてこのような点の近傍では $\bar{\partial} F$ は

$$\bar{\partial} F(x,y) = \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}\frac{g'(y)^2}{f(y) - f'(y)}$$

と表される. よって x, y の滑らかな関数 ψ_1, ψ_2 で

$$\psi_1^2 = \partial F, \qquad \psi_2^2 = -\bar{\partial} F, \qquad \psi_1\overline{\psi_2} = \frac{g'}{2\sqrt{-1}} \ (= \partial g)$$

を満たすものが存在し, この条件を満たす滑らかな関数の組は (ψ_1, ψ_2) と $(-\psi_1, -\psi_2)$ のみである. ∂F と $\bar{\partial} F$ は同時に 0 になることは無いので, $\Psi \neq {}^t(0,0)$ がわかり, また $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ に注意して $D_U \Psi = {}^t(0,0)$ を示すことができる.

以下, f や g は $I = \mathbf{R}$ 上定義されているとする. このとき ι は $\mathbf{C}$ から E^3 への共形的なはめこみである. さらに f や g は周期的であるとし, これらは最小の周期 $l_0 > 0$ を共有するものとする. このとき $\mathbf{C}$ の格子 Λ として 2π と $\sqrt{-1}l_0$ によって生成されるものを考え

ると, ι は $\mathbf{C}/\Lambda$ から E^3 への共形的なはめこみとみなされる. (6) から, U は周期 l_0 を持つ周期関数であることがわかる. Ψ は Λ に関する周期関数ではない: まず $\gamma := 2\pi$ のとき任意の $z \in \mathbf{C}$ に対し, $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = -\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ; さらに ι がうめこみの場合, $\gamma := \sqrt{-1}l_0$ のとき任意の $z \in \mathbf{C}$ に対し, $\Psi(z+\gamma, \overline{z}+\overline{\gamma}) = -\Psi(z, \overline{z})$ が成り立つ.

例えば, f や g として次のようなものをとる:

$$f(y) := R + r\cos\phi(y), \qquad g(y) := r\sin\phi(y), \tag{8}$$

但し $R > r > 0$ でありまた ϕ は $\mathbf{R}$ 上の滑らかな単調増加関数で任意の $y \in \mathbf{R}$ に対し

$$\phi'(y) = \frac{R + r\cos\phi(y)}{r} \tag{9}$$

および $\phi(y + l_0) = \phi(y) + 2\pi$ を満たす (条件(9) は f と g が $f^2 = (f')^2 + (g')^2$ を満たすためのものである). f, g に対応する共形的なはめこみ ι による $\mathbf{C}$ の像は xz-平面上の中心が $(R, 0)$, 半径が r の円を z-軸の周りの回転によって動かして得られる回転トーラスである (特に $R/r = \sqrt{2}$ の場合の回転トーラスは S^3 の Clifford トーラスの立体射影による像と E^3 において共形同値である). (6) に(8) を代入して(9) に注意することによって,

$$U(y) = \frac{R + 2r\cos\phi(y)}{4r} \tag{10}$$

を得る. また(7) に(8) を代入して,

$$\begin{aligned} \partial F(x,y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(R + r\cos\phi(y))(1 + \sin\phi(y)), \\ \overline{\partial}F(x,y) &= \frac{\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}x}}{2}(R + r\cos\phi(y))(1 - \sin\phi(y)) \end{aligned} \tag{11}$$

を得る. ここで注意したいことは, 例えば $\psi_1^2 = \partial F$ を満たす滑らかな複素数値関数 ψ_1 を得たいならば, (11) における ∂F についての式の右辺の平方根をただ考えても駄目 (ψ_1 の滑らかさについての考慮が必要) であるということで, この式の右辺の因数の一つである $1 + \sin\phi(y)$ をこの零点 (例えば $\phi = -\pi/2$ が成り立つ点) の付近で $\cos^2\phi(y)/(1 - \sin\phi(y))$ と表せるので ψ_1 としてはこうした点の付近では

$$\psi_1(x,y) = \pm\frac{e^{\sqrt{-1}(x/2+\pi/4)}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R + r\cos\phi(y)}{1 - \sin\phi(y)}}\,\cos\phi(y)$$

と表されるものを考えなければならない (従って $\psi_1(x, y + l_0) = -\psi_1(x,y)$ が成り立つ). ψ_2 についても同様である. 最後に ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ を求めたい. 系

2.4 によると, (10) で与えられている U の 2 乗 U^2 を $\mathbf{C}/\Lambda$ 上積分して得られる値を 4 倍すれば $\mathcal{W}(\iota)$ を求めることができる. (9) に注意して,

$$4\int_{\mathbf{C}/\Lambda} U^2 dxdy$$
$$= \frac{\pi}{2r^2}\int_0^{l_0}(R+2r\cos\phi(y))^2 dy = \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\int_0^{l_0} dy = \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{(R/r)+\cos\phi}$$

がわかる. 最右辺の積分は

$$s = \sqrt{\frac{(R/r)-1}{(R/r)+1}}\ \tan\frac{\phi}{2}$$

と変数変換すると計算することができ, その結果 ι に対する Willmore 汎関数の値 $\mathcal{W}(\iota)$ は

$$4\int_{\mathbf{C}/\Lambda} U^2 dxdy = \frac{(R/r)^2\pi^2}{\sqrt{(R/r)^2-1}}$$

であることがわかる. 右辺は $R/r = \sqrt{2}$ のときに最小値 $2\pi^2$ をとる ([Wil] においても同様の議論をしていて, その結果 $2\pi^2$ という値に注目することになった).

注意 $(R,r) = (\sqrt{2},1)$ に対応する共形的なはめこみ ι_0 による $\mathbf{C}$ の像は S^3 の Clifford トーラス

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3 \;\middle|\; x_1^2+x_2^2=\frac{1}{2},\ x_3^2+x_4^2=\frac{1}{2}\right\}$$

の立体射影による像に等しい: $\mathbf{R}^2$ から S^3 への写像 ι_1 を

$$\iota_1(x,y) := \left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2}}, \frac{\cos y}{\sqrt{2}}, \frac{\sin y}{\sqrt{2}}\right)$$

($(x,y)\in\mathbf{R}^2$) とおくと, S^3 の点 $N := (0,0,0,1)$ からの立体射影 $\pi : S^3\setminus\{N\}\longrightarrow E^3$ による $\iota_1(x,y)$ の像は

$$\pi\circ\iota_1(x,y) = \left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}-\sin y}, \frac{\sin x}{\sqrt{2}-\sin y}, \frac{\cos y}{\sqrt{2}-\sin y}\right)$$

であり, E^2 の曲線

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin y}, \frac{\cos y}{\sqrt{2}-\sin y}\right) \;\middle|\; y\in\mathbf{R}\right\}$$

は $(\sqrt{2},0)$ を中心とし半径が 1 の円を描くので, $\iota_0(\mathbf{C}) = \pi\circ\iota_1(E^2)$ がわかる.

3 Bloch 多様体および複素 Fermi 曲線

以下においては, 特に断らない限り関数は複素数値であるとする. Λ を $\mathbf{C}$ の格子とする. $\mathbf{C}$ 上の関数 ψ が Λ に関して 準周期的 (quasiperiodic) であるとは, Λ から乗法群

$\mathbf{C}^\times := \mathbf{C}\setminus\{0\}$ への準同型写像 $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ が存在して任意の $z\in\mathbf{C}$ および任意の $\gamma\in\Lambda$ に対し

$$\psi(z+\gamma,\overline{z}+\overline{\gamma}) = \varepsilon(\gamma)\psi(z,\overline{z}), \tag{12}$$

が成り立つときにいう. ψ が周期的であることと $\varepsilon\equiv 1$ は同値である. 第2節の系 2.5 における ψ_i は Λ に関して準周期的である.

準同型写像 $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ に対し, $\mathbf{C}^2$ の元 $k = (k_1,k_2)$ が存在して任意の $\gamma = \gamma_1 + \sqrt{-1}\gamma_2 \in \Lambda$ に対し

$$\varepsilon(\gamma) = \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}(k_1\gamma_1+k_2\gamma_2)\bigr) \tag{13}$$

が成り立つ. 逆に $\mathbf{C}^2$ の元 k に対し, (13) で定められる写像 $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ は準同型である. Λ に関して準周期的な関数 ψ に付随する準同型写像 ε に対し, (13) を満たす $k\in\mathbf{C}^2$ を ψ の <u>準運動量</u> (quasimomentum) という. 準同型写像 ε に対し, (13) を満たす $k\in\mathbf{C}^2$ は一意ではないが, $\mathbf{C}^2/\Lambda^*$ の元 $[k]$ を唯一つ定める (Λ^* は Λ の双対格子). Λ から $\mathbf{C}^\times$ への準同型写像の集合と $\mathbf{C}^2/\Lambda^*$ の間に 1 対 1 対応が存在し, 一つの準周期的な関数に対しその準運動量の集合は $\mathbf{C}^2/\Lambda^*$ の元で与えられる.

準同型写像 $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathbf{C}^\times$ を一つとり E を $\mathbf{C}$ 上の自明な複素直線束 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ とするとき, E に次のように同値関係 $\sim_\varepsilon$ を導入する: E の元 (z_1,ξ_1), (z_2,ξ_2) に対し Λ の元 γ が存在して

$$z_2 - z_1 = \gamma, \qquad \xi_2 = \varepsilon(\gamma)\xi_1$$

が成り立つとき, $(z_1,\xi_1)\sim_\varepsilon(z_2,\xi_2)$ と書く. $E_\varepsilon := E/\sim_\varepsilon$ とおく. このとき E_ε は $\mathbf{C}/\Lambda$ 上の複素直線束である. $\mathrm{pr} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\Lambda$ を標準射影とするとき, $P := \mathbf{C}$ を全空間, $M := \mathbf{C}/\Lambda$ を底空間とし $G := \Lambda$ を構造群とする主束 $P(M,G,\mathrm{pr})$ を考えることができる ($G=\Lambda$ を 0 次元 Lie 群とみなす) が, このとき 1 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}$ 上の $G=\Lambda$ の表現である $1/\varepsilon$ によって主束 $P(M,G,\mathrm{pr})$ に付随する複素直線束である $P\times_{1/\varepsilon}\mathbf{C}$ は E_ε に等しい. (12) に注意すると, E_ε の切断と準同型写像 ε が付随する $\mathbf{C}$ 上の準周期的な関数を同一視することができる.

ψ が準運動量 $k\in\mathbf{C}^2$ を持つ準周期的な関数であることと Λ に関して周期的な $\mathbf{C}$ 上の関数 ϕ が存在して任意の $z = x+\sqrt{-1}y\in\mathbf{C}$ に対して

$$\psi(z,\overline{z}) = \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}(k_1x+k_2y)\bigr)\phi(z,\overline{z}) \tag{14}$$

が成り立つことは同値である．準周期的な関数 ψ の二つの準運動量 k, k' のそれぞれに対し(14) の中でのように定まる周期関数を ϕ, ϕ' とすると, ϕ と ϕ' の間の関係は

$$\phi'(z,\overline{z}) = \exp\bigl(-2\pi\sqrt{-1}(\gamma_1^* x + \gamma_2^* y)\bigr)\phi(z,\overline{z}) \tag{15}$$

で与えられる, 但し $\gamma^* = \gamma_1^* + \sqrt{-1}\gamma_2^*$ は Λ^* の元であり $k' - k = \gamma^*$ を満たす.

準運動量 k を持つ準周期的な関数で対応する周期関数が $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ (および $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$) の元であるようなものの集合を $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ (および $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$) で表す．$k' = k + \gamma^*$ に対し, $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k') = L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ および $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k') = L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ が成り立つ．$L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$, $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ は線形空間をなす．ϕ_1, $\phi_2 \in L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ に対し

$$\langle \phi_1,\ \phi_2\rangle_{L^2} := \int_{\mathbf{C}/\Lambda} \phi_1\overline{\phi}_2\,dxdy$$

とおき, ψ_1, $\psi_2 \in L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ に対し $\langle \psi_1,\ \psi_2\rangle_{L^2;k} := \langle \phi_1,\ \phi_2\rangle_{L^2}$ とおく, 但し ϕ_i は(14) の中でのように ψ_i および k から定まる周期関数である．$\langle\ ,\ \rangle_{L^2;k}$ は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ の内積でありこの内積に関して $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ は Hilbert 空間とみなされることがわかる．また ψ_1, $\psi_2 \in L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ に対し

$$\begin{aligned}&\langle \psi_1,\ \psi_2\rangle_{L_1^2;k}\\ &:= \langle \phi_1,\ \phi_2\rangle_{L^2} + \int_{\mathbf{C}/\Lambda} \bigl(2\pi\sqrt{-1}\phi_1 k + \nabla\phi_1\bigr)\cdot\Bigl(\overline{2\pi\sqrt{-1}\phi_2 k + \nabla\phi_2}\Bigr)dxdy\end{aligned}$$

(但し $\nabla\phi_i := {}^t(\partial\phi_i/\partial x, \partial\phi_i/\partial y)$) とおくと, $\langle\ ,\ \rangle_{L_1^2;k}$ は $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ の内積でありこの内積に関して $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ は Hilbert 空間とみなされることがわかる．(15) に注意すると, $k' = k + \gamma^*$ に対し

$$\langle\ ,\ \rangle_{L^2;k'} = \langle\ ,\ \rangle_{L^2;k}, \qquad \langle\ ,\ \rangle_{L_1^2;k'} = \langle\ ,\ \rangle_{L_1^2;k}$$

がわかる．以後 $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ を $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ と書き, $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;k)$ を $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ と書く．$L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ の点列が収束することと (k を一つ固定して) $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の対応する点列が収束することは同値である．$\psi \in L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ に対し (k を一つ固定して) 対応する $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元を ϕ とするとき, $\partial\psi \in L^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ に対応する $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元は $\partial\phi + \pi\bigl(k_2 + \sqrt{-1}k_1\bigr)\phi$ であり, $\overline{\partial}\psi \in L^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ に対応する $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元は $\overline{\partial}\phi + \pi\bigl(-k_2 + \sqrt{-1}k_1\bigr)\phi$ である.

U を Λ に関して周期的な $\mathbf{C}$ 上の関数とし, さらに $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元とする．D_U を第２節の中でのような Dirac 作用素とする．このとき D_U は $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ から $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ への線形作用素とみなされる．さらに任意の $k \in \mathbf{C}^2$ に対し, D_U は $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])\times$

$L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ から $L^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k]) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ への線形作用素とみなされる．Dirac 作用素 D_U の 0-Bloch 関数 とはある $k \in \mathbf{C}^2$ に対し $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k]) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ の零ではない元で D_U の核に含まれるものである．$\Psi = {}^t(\psi_1, \psi_2)$ が D_U の 0-Bloch 関数で準運動量 k を持つものであるとき，$L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 $\Phi = {}^t(\phi_1, \phi_2)$ が存在して ψ_i と ϕ_i の間に(14)のような関係がありかつ $D(U;k)\Phi = {}^t(0,0)$ が成り立つ，但し

$$D(U;k) := D_U + \pi \begin{pmatrix} 0 & k_2 + \sqrt{-1}k_1 \\ k_2 - \sqrt{-1}k_1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．また $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 Φ が $D(U;k)\Phi = {}^t(0,0)$ を満たすとき，Φ に対し(14)によって定義される $\mathbf{C}$ 上の関数 Ψ は D_U の 0-Bloch 関数で準運動量 k を持つものである．よって次の補題を得る．

補題 3.1 ([T3]) Ψ が Dirac 作用素 D_U の 0-Bloch 関数で準運動量 k を持つものであることと $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 Φ が $D(U;k)\Phi = {}^t(0,0)$ を満たすことは同値である，但し ψ_i と ϕ_i の関係は(14) によって与えられる．

D_U のある 0-Bloch 関数の準運動量であるような $\mathbf{C}^2$ の元の集合を $\mathcal{F}(U)$ で表す．

定理 3.2 ([T3]) U を $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元とする．このとき $\mathcal{F}(U)$ は $\mathbf{C}^2$ の解析的集合である; 余次元は正であり，局所的に唯一つの解析関数の零点の集合として表される．

証明 複素数 $a \in \mathbf{C}$ に対し Dirac 作用素 D_a を $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ から $L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ への線形作用素とみなすことができるが，a として D_a の核が ${}^t(0,0)$ のみからなるようなものをとる．このとき D_a は全単射であるので，逆作用素

$$D_a^{-1} : L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \longrightarrow L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$$

が存在する．これは有界作用素であり，さらに Kondrachov のうめこみ定理を用いて D_a^{-1} は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ 上のコンパクト作用素であることがわかる．このとき

$$D(U;k) \circ D_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U - a & \pi(k_2 + \sqrt{-1}k_1) \\ \pi(k_2 - \sqrt{-1}k_1) & U - a \end{pmatrix} \circ D_a^{-1} \tag{16}$$

が成り立ち，そして U が $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元であれば(16) の右辺第 2 項は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ 上のコンパクト作用素である．従って $D(U;k) \circ D_a^{-1}$ は Fredholm 作用素である．そしてこれは k に関して多項式であるので，特に k に関して正則である．[Ku] の定理 1.6.16 によると，$L^2(\mathbf{C}/\Lambda) \times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ 上の Fredholm 作用素 $D(U;k) \circ D_a^{-1}$ が非自明な核を持つような k

の集合は $\mathbf{C}^2$ の解析的集合でありかつ局所的に唯一つの解析関数の零点の集合として表される. そして補題 3.1 から, この集合は $\mathcal{F}(U)$ であることがわかる. また $k_1=0$ とおくと

$$\frac{1}{\pi k_2}D(U;k)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{\pi k_2}D_U \tag{17}$$

を得るが, D_U は $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ から $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ への有界作用素であり, そして任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し正数 $R>0$ を十分大きくとると $|k_2|>R$ を満たすような k_2 に対し(17) の右辺第 2 項の作用素ノルムが上から ε で押さえられるので, 十分大きな絶対値を持つ k_2 に対し $D(U;k)$ の核は ${}^t(0,0)$ のみからなることがわかる. よって $\mathcal{F}(U)\neq\mathbf{C}^2$ がわかり, $\mathcal{F}(U)$ の余次元が正であることがわかる. こうして定理 3.2 を得る. □

参考 定理 3.2 の証明の中で用いた [Ku] の定理 1.6.16 は [G], [Kel], [K-T] において主張されている.

V, W は $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元で複素数値であるとする. Dirac 作用素

$$D_{V,W}:=\begin{pmatrix}V & \partial\\ -\bar{\partial} & W\end{pmatrix}$$

の <u>Bloch 関数</u> (または <u>Floquet 関数</u>) とはある $k\in\mathbf{C}^2$ に対し $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])\times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda;[k])$ の零ではない元で $D_{V,W}$ の固有関数であるもののことである. 補題 3.1 と同様に, 次を得る:

補題 3.3 Ψ が Dirac 作用素 $D_{V,W}$ の Bloch 関数で準運動量 k を持つものであることと $L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L_1^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 Φ が

$$D(V,W;k):=D_{V,W}+\pi\begin{pmatrix}0 & k_2+\sqrt{-1}k_1\\ k_2-\sqrt{-1}k_1 & 0\end{pmatrix}$$

の固有関数であることは同値である, 但し ψ_i と ϕ_i の関係は(14) によって与えられる. そして Ψ に対応する固有値と Φ に対応する固有値は等しい.

$D_{V,W}$ の Bloch 関数で準運動量 $k\in\mathbf{C}^2$ を持ち対応する固有値が $\lambda\in\mathbf{C}$ であるものが存在するような $(k,\lambda)\in\mathbf{C}^3$ の集合を $\mathcal{B}(V,W)$ で表す. 定理 3.2 の証明を参考にして, 次の定理を得る.

定理 3.4 V, W を $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元とする. このとき $\mathcal{B}(V,W)$ は $\mathbf{C}^3$ の解析的集合である; 余次元は正であり, 局所的に唯一つの解析関数の零点の集合として表される.

$L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 V, W に対し, 解析的集合 $\mathcal{B}(V,W)$ を Dirac 作用素 $D_{V,W}$ の Bloch 多様体という. また $\mathcal{F}(V,W)$ は $\mathbf{C}^2$ の部分集合で,

$$\mathcal{F}(V,W)\times\{0\}=\mathcal{B}(V,W)\cap\{\lambda=0\}$$

で定義されるものとする. $\mathcal{F}(V,W)$ は $\mathbf{C}^2$ の解析的集合である. $\mathcal{F}(V,W)$ を Dirac 作用素 $D_{V,W}$ の複素 Fermi 曲線という. $U\in L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ に対し, $\mathcal{F}(U)=\mathcal{F}(U,U)$ が成り立つ.

命題 3.5 ([T4], [Sc1]) $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 V, W に対し, 次が成り立つ.

(a) 写像 $\sigma:\mathbf{C}^3\longrightarrow\mathbf{C}^3$, $(k,\lambda)\mapsto(-k,\lambda)$ によって $\mathcal{B}(V,W)$ と $\mathcal{B}(W,V)$ は1対1に対応する.

(b) 写像 $\rho:\mathbf{C}^3\longrightarrow\mathbf{C}^3$, $(k,\lambda)\mapsto\left(\overline{k},\overline{\lambda}\right)$ によって $\mathcal{B}(V,W)$ と $\mathcal{B}\left(\overline{V},\overline{W}\right)$ は1対1に対応する.

(c) 写像 $\eta:\mathbf{C}^3\longrightarrow\mathbf{C}^3$, $(k,\lambda)\mapsto\left(-\overline{k},\overline{\lambda}\right)$ によって $\mathcal{B}(V,W)$ と $\mathcal{B}\left(\overline{W},\overline{V}\right)$ は1対1に対応する.

証明 $\mathcal{B}(V,W)$ の元 (k,λ) に対し $D_{V,W}$ の Bloch 関数 $\Psi={}^t(\psi_1,\psi_2)$ が存在する. この Ψ に対し $\left(\overline{\psi}_2,-\overline{\psi}_1\right)$ は $D_{\overline{W},\overline{V}}$ の Bloch 関数で準運動量 $-\overline{k}$ を持ち対応する固有値は $\overline{\lambda}$ である. よって (c) を得る. Stokes の定理を用いて, ϕ_1, $\phi_2\in L^2_1(\mathbf{C}/\Lambda)$ に対し

$$\begin{aligned}\left\langle\partial\phi_1+\pi\left(k_2+\sqrt{-1}k_1\right)\phi_1,\ \phi_2\right\rangle_{L^2}&=\left\langle\phi_1,\ -\overline{\partial}\phi_2-\pi\left(-\overline{k}_2+\sqrt{-1}\overline{k}_1\right)\phi_2\right\rangle_{L^2},\\ \left\langle\overline{\partial}\phi_1+\pi\left(-k_2+\sqrt{-1}k_1\right)\phi_1,\ \phi_2\right\rangle_{L^2}&=\left\langle\phi_1,\ -\partial\phi_2-\pi\left(\overline{k}_2+\sqrt{-1}\overline{k}_1\right)\phi_2\right\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

がわかる. よって $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ において線形作用素

$$\partial+\pi\left(k_2+\sqrt{-1}k_1\right),\qquad\overline{\partial}+\pi\left(-k_2+\sqrt{-1}k_1\right)$$

(但し定義域は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ において稠密な $L^2_1(\mathbf{C}/\Lambda)$) の共役作用素はそれぞれ

$$-\left(\overline{\partial}+\pi\left(-\overline{k}_2+\sqrt{-1}\overline{k}_1\right)\right),\qquad-\left(\partial+\pi\left(\overline{k}_2+\sqrt{-1}\overline{k}_1\right)\right)$$

である. 従って $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ において線形作用素 $D(V,W;k)$ (定義域は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ において稠密な $L^2_1(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2_1(\mathbf{C}/\Lambda)$) の共役作用素 $D^*(V,W;k)$ は $D\left(\overline{V},\overline{W};\overline{k}\right)$ であることがわかる:

$$D^*(V,W;k)=D\left(\overline{V},\overline{W};\overline{k}\right).\tag{18}$$

複素数 $a\in\mathbf{C}$ を定理 3.2 の証明の中でのようなものとすると, V, $W\in L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ に対し $D(V,W;k)\circ D_a^{-1}$ は Fredholm 作用素であるので, $\dim\operatorname{Ker}D(V,W;k)<\infty$ がわかる.

$\mathbf{C}/\Lambda$ 上の楕円型作用素である $D(V,W;k)$ の指数 $\mathrm{ind}\,D(V,W;k)$ は $D(V,W;k)$ の核の次元 $\dim\mathrm{Ker}\,D(V,W;k)$ と $D^*(V,W;k)$ の核の次元 $\dim\mathrm{Ker}\,D^*(V,W;k)$ の差に等しい:

$$\mathrm{ind}\,D(V,W;k)=\dim\mathrm{Ker}\,D(V,W;k)-\dim\mathrm{Ker}\,D^*(V,W;k). \tag{19}$$

[L-M] の第 3 章系 7.9 によると, $\mathrm{ind}\,D(V,W;k)$ は $D(V,W;k)$ の主表象である D_0 の指数 $\mathrm{ind}\,D_0$ に等しい. D_0 は $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)\times L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ において自己共役であるつまり $D_0^*=D_0$ であるので, $\mathrm{ind}\,D_0=0$ が成り立つ. よって $\mathrm{ind}\,D(V,W;k)=0$ がわかり, (18) および(19) から

$$\dim\mathrm{Ker}\,D(V,W;k)=\dim\mathrm{Ker}\,D^*(V,W;k)=\dim\mathrm{Ker}\,D(\overline{V},\overline{W};\overline{k})$$

を得る. よって $\mathrm{Ker}\,D(V,W;k)\neq\{0\}$ ならば, $\mathrm{Ker}\,D(\overline{V},\overline{W};\overline{k})\neq\{0\}$ がわかる. より一般に, $\lambda\in\mathbf{C}$ が $D(V,W;k)$ の固有値であるならば, $\overline{\lambda}$ は $D(\overline{V},\overline{W};\overline{k})$ の固有値であることがわかる. よって補題 3.3 を用いて, (b) を得る. (a) は $\sigma=\eta\circ\rho$ からわかる. □

系 3.6 $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 V, W に対し, 次が成り立つ.

(a) 写像 $\sigma:\mathbf{C}^2\longrightarrow\mathbf{C}^2$, $k\mapsto -k$ によって $\mathcal{F}(V,W)$ と $\mathcal{F}(W,V)$ は 1 対 1 に対応する.

(b) 写像 $\rho:\mathbf{C}^2\longrightarrow\mathbf{C}^2$, $k\mapsto\overline{k}$ によって $\mathcal{F}(V,W)$ と $\mathcal{F}(\overline{V},\overline{W})$ は 1 対 1 に対応する.

(c) 写像 $\eta:\mathbf{C}^2\longrightarrow\mathbf{C}^2$, $k\mapsto-\overline{k}$ によって $\mathcal{F}(V,W)$ と $\mathcal{F}(\overline{W},\overline{V})$ は 1 対 1 に対応する.

注意 $U\in L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ に対し, $\mathcal{F}(U)$ は σ によって不変であることがわかる. $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元 V, W が実数値であるならば, ρ によって $\mathcal{F}(V,W)$ は不変である. 従って $U\in L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ が実数値であるならば, $\mathcal{F}(U)$ は σ, ρ, η によって不変である.

4 コンパクトリーマン面に対応する 2 重周期的ポテンシャルの構成および その複素 Fermi 曲線

種数が g の 2 点付コンパクトリーマン面 Y とその上の $\mathbf{C}^2$ に値を取る多価な有理型関数 $k=(k_1,k_2)\colon Y\to\mathbf{C}^2$ の組 (Y,∞^-,∞^+,k) を考える. ただし, つぎの条件をみたすものとする.

準運動量条件 (i) k_1 と k_2 は Y^* において正則で, さらに, 2 点 ∞_- と ∞_+ において 1 位の極をもつ. さらに, ある分枝において, $k_1-\sqrt{-1}k_2$ と $k_1+\sqrt{-1}k_2$ はそれぞれ, ∞_- と ∞_+ において零になる.

準運動量条件 (ii) k の任意の二つの分枝の差は Λ^* の元になる. さらに, Λ^* のすべての元を与える.

準運動量条件 (iii) Y には, 固定点のない反正則対合的同型 η が与えられている. また η^*k の任意の分枝は, $-\bar{k}$ のある分枝に等しい.

このとき, **準運動量条件 (i)** より k は2点 $\infty_\pm$ のみにおいて極をもつことから, ただちに $\eta(\infty_\pm) = \infty_\mp$ が従うことに注意する. さて, **準運動量条件 (i)** と**準運動量条件 (iii)** を用いて, ∞_+ と ∞_- の近傍において, $k_1(\infty_\mp) \mp \sqrt{-1}k_2(\infty_\mp) = 0$ (複合同順), $\eta^*k = -\bar{k}$ が満たされるように, それぞれの近傍ごとに分枝を選び, つぎの条件 (1) と (2) を満たす2次元平面 $\mathbf{R}^2$ のパラメタ $x = (x_1, x_2)$ に依存した Y 上の $\mathbf{C}^2$ に値を取る Baker-Akhiezer 関数と呼ばれる $\psi(x, P)$ を考える.

(1) Y^* 上の因子 $E = P_1 + \cdots + P_{g+1}$ が存在し, $\psi(x, \cdot)$ を複素直線束 $\mathcal{O}(E)$ の切断とみなしたとき, Y^* 上で正則になっている. ただし, Y^* は Y から2点 ∞_+ と ∞_- を除いたものとする.

(2) ψ は2点 ∞_+, ∞_- において次の漸近展開 (A) をもつ.

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\psi = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{+}}\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{+}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\psi = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{-}}\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{-}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_-.$$

ただし $< x, k >= x_1k_1 + x_2k_2$. ここで, **準運動量条件 (i)** をもちいて, k_1^{-1} を2点 $\infty_\pm$ における, $k_1^{-1}(\infty_\pm) = 0$ を満たす局所座標系とみなしている. ある因子 $P_1 + \ldots + P_{g+1}$ に対しては, Baker-Akhiezer 関数の理論 ([Be], [D-K-N]) より, ∞_+ と ∞_- における漸近展開の定数項が ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1)$ になる関数 ψ は一意的に存在することに注意する.

定理 4.1 任意の Λ の元 $\gamma = {}^t(\gamma_1, \gamma_2)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\psi(x + \gamma, P) = \exp(2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x, P).$$

すなわち ψ は準周期的である. つまり第3節の ϵ として $\epsilon(\gamma) = \exp(2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)$ がとれる.

証明 先の漸近展開 (A) において x の変わりに $x + \gamma$ を代入すると,

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x + \gamma, k >)\psi(x + \gamma, P) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{+}}\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{+}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x+\gamma, k >)\psi(x+\gamma, P) = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi^-_{1,1}}\\ \widetilde{\psi^-_{2,1}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_-.$$

一方

$$\begin{aligned}&\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x+\gamma, k >)\psi(x+\gamma, P)\\ &= \exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\exp(-2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x+\gamma, P)\end{aligned}$$

であるので $\phi = \exp(-2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x+\gamma, P)$ とおくと

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\phi = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi^+_{1,1}}\\ \widetilde{\psi^+_{2,1}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\phi = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi^-_{1,1}}\\ \widetilde{\psi^-_{2,1}}\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_-.$$

したがって ϕ は Baker-Akhiezer 関数の条件 (2) を満たすことがわかる. また k は多価関数であるが, **準運動量条件 (ii)** より $\exp(-2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)$ は一価となり, さらに Y^* 上でいたるところ消えていない正則関数となる. ゆえに $\phi = \exp(-2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x+\gamma, P)$ は Baker-Akhiezer 関数の条件 (1) も満たす. Baker-Akhiezer 関数の一意性より,

$$\begin{aligned}\phi &= \psi,\\ \exp(-2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x+\gamma, P) &= \psi(x, P),\\ \psi(x+\gamma, P) &= \exp(2\pi\sqrt{-1} < \gamma, k >)\psi(x, P)\end{aligned}$$

がわかる. □

系 4.2 Baker-Akhiezer 関数 ψ に対して, ポテンシャル V と W を, つぎで定義する.

$$V = -2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi^+_{1,1}}, \quad W = 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi^-_{1,1}}.$$

このとき V と W は, 格子 Λ に関して周期的である.

証明 Λ の任意の元 γ をとり, 先の漸近展開 (A) において x の変わりに $x+\gamma$ を代入すると,

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x+\gamma, k >)\psi(x+\gamma, P) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi^+_{1,1}}(x+\gamma)\\ \widetilde{\psi^+_{2,1}}(x+\gamma)\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \text{ at } \infty_+,$$

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x+\gamma, k >)\psi(x+\gamma, P) = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{-}}(x+\gamma)\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{-}}(x+\gamma)\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \text{ at } \infty_-.$$

定理 4.1 より上記の左辺は $\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\psi(x, P)$ に等しいので,

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\psi(x, P) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{+}}(x+\gamma)\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{+}}(x+\gamma)\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1} < x, k >)\psi(x, P) = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\widetilde{\psi_{1,1}^{-}}(x+\gamma)\\ \widetilde{\psi_{2,1}^{-}}(x+\gamma)\end{pmatrix} k_1^{-1} + O(k_1^{-2})\right] \quad \text{at } \infty_-.$$

これと先の漸近展開 (A) の 1 次の項の係数を比較することにより,

$$\widetilde{\psi_{1,1}^{+}}(x+\gamma) = \widetilde{\psi_{1,1}^{+}}(x), \quad \widetilde{\psi_{1,1}^{-}}(x+\gamma) = \widetilde{\psi_{1,1}^{-}}(x).$$

これより, V, W は格子 Λ に関して周期的であることが従う. □

つぎにここで構成した V と W をポテンシャルにもつ Dirac 作用素 $D_{V,W}$ と Baker-Akhiezer 関数 ψ の間の関係について考察する.

定理 4.3 系 4.2 で与えられた V と W をポテンシャルにもつ Dirac 作用素を $D_{V,W}$ とする. このとき, 先で定義された Baker-Akhiezer 関数 ψ は Dirac 方程式 $D_{V,W}\psi = 0$ を満たす.

証明 まず, ψ を点 ∞^+ において,

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_k + \psi_k\widetilde{\psi_{1,1}^{+}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2)\\ \psi_k\widetilde{\psi_{2,1}^{+}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2)\end{pmatrix}$$

と漸近展開できることに注意する. ただし $\psi_k = \exp(2\pi\sqrt{-1} < x, k >)$. また ψ に Dirac 作用素を作用させたものを

$$D_{V,W}\psi = \begin{pmatrix}V & \partial\\ -\bar\partial & W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D\psi^{(1,1)}\\ D\psi^{(2,1)}\end{pmatrix}$$

とおき, $D\psi^{(1,1)}$ の点 ∞^+ における漸近展開を計算すると,

$$\begin{aligned}
D\psi^{(1,1)} =& V\psi_k + V\psi_k\widetilde{\psi^+_{1,1}}(1/k_1) + V\psi_k O(1/k_1^2) + \partial(\psi_k\widetilde{\psi^+_{2,1}}(1/k_1)) + \partial(\psi_k O(1/k_1^2)) \\
=& V\psi_k + V\psi_k\widetilde{\psi^+_{1,1}}(1/k_1) + V\psi_k O(1/k_1^2) \\
&+ (\partial\psi_k)\widetilde{\psi^+_{2,1}}(1/k_1) + \psi_k(\partial\widetilde{\psi^+_{2,1}})(1/k_1) \\
&+ (\partial\psi_k)O(1/k_1^2) + \psi_k\partial(O(1/k_1^2)) \\
=& V\psi_k + V\psi_k\widetilde{\psi^+_{1,1}}(1/k_1) + V\psi_k O(1/k_1^2) \\
&+ \pi(k_2 + \sqrt{-1}k_1)\psi_k\widetilde{\psi^+_{2,1}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1) \\
&+ \psi_k O(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2) \\
=& V\psi_k + V\psi_k\widetilde{\psi^+_{1,1}}(1/k_1) + V\psi_k O(1/k_1^2) \\
&+ \pi(2\sqrt{-1}k_1 + O(1/k_1))\psi_k\widetilde{\psi^+_{2,1}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1) \\
&+ \psi_k O(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2) \\
=& \psi_k\left[V + 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi^+_{2,1}} + O(1/k_1)\right].
\end{aligned}$$

仮定 $V = -2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi^+_{2,1}}$ より

$$D\psi^{(1,1)} = \psi_k O(k_1^{-1}) \quad \text{at } \infty_+.$$

同様に $D\psi^{(2,1)}$ の点 ∞^+ における漸近展開を計算すると,

$$D\psi^{(2,1)} = \psi_k O(k_1^{-1}) \quad \text{at } \infty_+.$$

つぎに, ψ を点 ∞^- において,

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_k\widetilde{\psi^-_{1,1}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2) \\ \psi_k + \psi_k\widetilde{\psi^-_{2,1}}(1/k_1) + \psi_k O(1/k_1^2)\end{pmatrix}$$

と漸近展開し, $D\psi^{(2,1)}$ の点 ∞^- における漸近展開を計算すると,

$$
\begin{aligned}
D\psi^{(2,1)} =& -\bar{\partial}(\psi_k\widetilde{\psi_{1,1}^-})(1/k_1) + \bar{\partial}(\psi_k O(1/k_1^2)) \\
&+ W\psi_k + W\psi_k\widetilde{\psi_{2,1}^-}(1/k_1) + W\psi_k O(1/k_1^2) \\
=& -(\bar{\partial}\psi_k)\widetilde{\psi_{1,1}^-}(1/k_1) - \psi_k(\bar{\partial}\widetilde{\psi_{1,1}^-})(1/k_1) \\
&-(\bar{\partial}\psi_k)O(1/k_1^2) - \psi_k\bar{\partial}(O(1/k_1^2)) \\
&+ W\psi_k + W\psi_k\widetilde{\psi_{2,1}^-}(1/k_1) + W\psi_k O(1/k_1^2) \\
=& -\pi(-k_2 + \sqrt{-1}k_1)\psi_k\widetilde{\psi_{1,1}^-}(1/k_1) - \psi_k(\bar{\partial}\widetilde{\psi_{1,1}^-})(1/k_1) \\
&-(\bar{\partial}\psi_k)O(1/k_1^2) - \psi_k\bar{\partial}(O(1/k_1^2)) \\
&+ W\psi_k + W\psi_k\widetilde{\psi_{2,1}^-}(1/k_1) + W\psi_k O(1/k_1^2) \\
=& -\pi(2\sqrt{-1}k_1 + O(1/k_1))\psi_k\widetilde{\psi_{1,1}^-}(1/k_1) - \psi_k(\bar{\partial}\widetilde{\psi_{1,1}^-})(1/k_1) \\
&-(\bar{\partial}\psi_k)O(1/k_1^2) - \psi_k\bar{\partial}(O(1/k_1^2)) \\
&+ W\psi_k + W\psi_k\widetilde{\psi_{2,1}^-}(1/k_1) + W\psi_k O(1/k_1^2) \\
=&\psi_k\left[W - 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi_{1,1}^-} + O(1/k_1)\right].
\end{aligned}
$$

仮定 $W = 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\psi_{1,1}^-}$ より

$$D\psi^{(2,1)} = \psi_k O(k_1^{-1}) \quad \text{at } \infty_-.$$

同様に $D\psi^{(1,1)}$ の点 ∞^+ における漸近展開を計算すると,

$$D\psi^{(2,1)} = \psi_k O(k_1^{-1}) \quad \text{at } \infty_-.$$

以上より $D\psi^{(1,1)}$ と $D\psi^{(2,1)}$ は因子 $E = P_1 + P_2 + \cdots + P_g$ に対応する Y 上の複素直線束 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$ と, 変換関数として ψ_k をもつ Y 上の複素直線束 L のテンソル積 $\mathcal{L}\otimes L$ の正則切断になっており, さらに2点 ∞_+ と ∞_- で消えることがわかる. 一方, リーマンロッホの公式より

$$
\begin{aligned}
&dim\, H^0(Y, \mathcal{L}\otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) - dim\, H^1(Y, \mathcal{L}\otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) \\
&= deg\,(\mathcal{L}\otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) + 1 - g \\
&= \{(g+1) + 0 - 2\} + 1 - g \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ここで, $degL=0$ であることと, **準運動量条件 (iii)** より, $dim\,H^1(Y,\mathcal{L}\otimes L(-\infty_+-\infty_-))=0$ が従うことを用いると, $dim\,H^0(Y,\mathcal{L}\otimes L(-\infty_+-\infty_-))=0$ となる. よって $D\psi^{(1,1)}=0$, $D\psi^{(2,1)}=0$ である. 以上より ψ は Dirac 方程式 $D_{V,W}\psi=0$ の解であることが示された. □

さて, 定理 4.3 により Y^* 上の任意の点 P に対して, $\psi(x,P)$ は $D_{V,W}$ の核の元であることがわかり, さらに定理 4.1 により多価関数 k による Y^* の像は $\mathcal{F}(V,W)$ に含まれていることがわかる. また k の任意の 2 つの分枝の差は, **準運動量条件 (ii)** より Λ^* に属する. よって $\mathcal{F}(V,W)/\Lambda^*$ を正規化したものが Y^* であると期待されるが定かではない.

5 おわりに

本稿に関連する事柄や今後も考察すべき話題などを述べたい.

(I) E^3 にはめこまれたコンパクトな曲面に対する Willmore 汎関数の値は E^3 の共形変換で不変である ([Wh]) が, [G-S] において Grinevich-Schmidt は E^3 にはめこまれたトーラスに対する複素 Fermi 曲線が E^3 の共形変換で不変であることを主張している (本稿における議論から, こうしたことが期待されることは自然であることがわかる).

(II) 第 2 節で曲面の表現公式が Dirac 作用素の観点で与えられることを見たが, [F] において Friedrich は曲面のスピン構造に関するスピノール束の切断に作用する Dirac 作用素の観点での情報と曲面論の基本方程式である Gauss-Codazzi の方程式との関係を説明している.

(III) 第 3 節ではポテンシャル V, W が $L^\infty(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元である場合に複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(V,W)$ が $\mathbf{C}^2$ の解析的集合であることを説明したが, [O-O-U] でも指摘されているように [Sc1] においては V, W が $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元である場合に $\mathcal{F}(V,W)$ が $\mathbf{C}^2$ の解析的集合であることを示す必要がある. ポテンシャルが $L^2(\mathbf{C}/\Lambda)$ の元である場合に正しいかどうかを今後も分析したい.

(IV) 本稿は大仁田義裕氏, 乙藤隆史氏, 宇田川誠一氏および守屋克洋氏との度重なる議論に基づいて作成された. 特に命題 3.5 の証明の方針は乙藤氏および宇田川氏に教えて頂いた.

参考文献

[Be] E. D. BELOKOLOS, *Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations*, E. D. Belokolos, et al. Berlin : Springer, 337pp (Springer series in nonlinear dynamics).

[D-K-N] B. A. DUBROVIN, I. M. KRICHEVER, S. P. NOVIKOV, *Integrable Systems I.* In: V. I. Arnold, S. P. Novikov (eds.) Dynamical Systems IV. Encyclopedia of Mathematial Sciences vol. 4, pp. 173-280. Springer, Berlin, Heidelberg (1990).

[F] T. FRIEDRICH, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space*, J. Geom. Phys., **28** (1998) 143–157.

[G] B. GRAMSCH, *Meromorphie in der Theorie der Fredholmoperatoren mit Anwendungen auf elliptische Differentialoperatoren*, Math. Ann., **188** (1970) 97–112.

[G-S] P. G. GRINEVICH, M. U. SCHMIDT, *Conformal invariant functionals of immersions of tori into* $\mathbf{R}^3$, J. Geom. Phys., **26** (1998) 51–78.

[Kel] M. V. KELDYSH, *On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operator*, Russian Math. Surveys, **26** (1971) 15–44.

[Ken] K. KENMOTSU, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., **245** (1979) 89–99.

[K-N] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry, Vol. I*, John Wiley & Sons, 1963.

[Ko] B. G. KONOPELCHENKO, *Induced surfaces and their integrable dynamics*, Stud. Appl. Math., **96** (1996) 9–52.

[K-T] S. G. KREIN, V. P. TROFIMOV, *Noetherian operators that depend holomorphically on parameters*, (Russian), A collection of articles on function spaces and operator equations, Proc. Sem. Functional Anal., Math. Fac., Voronezh State Univ., (1970) 63–85.

[Ku] P. KUCHMENT, *Floquet theory for partial differential equations*, Operator theory, Advances and Applications **60**, Birkhäuser (1993).

[L-M] H. B. LAWSON, JR., M-L. MICHELSOHN, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series **38**, Princeton University Press (1989).

[L-Y] P. LI, S.-T. YAU, *A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and first eigenvalues of compact surfaces*, Invent. Math., **69** (1982) 269–291.

[M-R] S. MONTIEL, A. ROS, *Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area*, Invent. Math., **83** (1985) 153–166.

[Mo] K. MORIYA, *Minimizing sequences for the Willmore functional and quaternions*, 数理解析研究所講究録「部分多様体論のさらなる発展にむけて」に掲載予定.

[O-O-U] Y. OHNITA, T. OTOFUJI, S. UDAGAWA, *Moduli spaces of complex Fermi curves and the Willmore functional*, 数理解析研究所講究録「部分多様体論のさらなる発展にむけて」に掲載予定.

[Sc1] M. U. SCHMIDT, *A proof of the Willmore conjecture*, preprint (math.DG/0203224).

[Sc2] M. U. SCHMIDT, *Existence of minimizing Willmore surfaces of prescribed conformal class*, preprint (arXiv:math.DG/0403301).

[S-T] K. SHIOHAMA, R. TAKAGI, *A characterization of a standard torus in* E^3, J. Differential Geom., **4** (1970) 477–485.

[Si1] L. SIMON, *Existence of Willmore surfaces*, Proc. Centre for Math. Anal., **10** (1985) 187–216.

[Si2] L. SIMON, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Commun. Anal. Geom., **1** (1993) 281–326.

[T1] I. A. TAIMANOV, *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, preprint (arXiv:dg-ga/9511005).

[T2] I. A. TAIMANOV, *Surfaces of revolution in terms of solitons*, Ann. Global Anal. Geom., **15** (1997) 419–435.

[T3] I. A. TAIMANOV, *The Weierstrass representation of closed surfaces in* $\mathbf{R}^3$, Funct. Anal. Appl., **32** (1998) 258–267.

[T4] I. A. Taimanov, *Finite-gap solutions of modified Veselov-Novikov equations, their spectral properties and applications*, Siberian Math. J., **40** (1999) 1146–1156.

[T5] I. A. Taimanov, *Finite-Gap Theory of the Clifford torus*, International Mathematics Research Notices, (2005) 103–120.

[T6] I. A. Taimanov, *Two-dimensional Dirac operator and surface theory*, preprint (arXiv:math.DG/0512543).

[We] J. L. Weiner, *On a problem of Chen, Willmore et alia*, Indiana University Math. J., **27** (1978) 19–35.

[Wh] J. H. White, *A global invariant of conformal mappings in space*, Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973) 162–164.

[Wi1] T. J. Willmore, *Note on embedded surfaces*, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat., (1965) 493–496.

[Wi2] T. J. Willmore, *Mean curvature of Riemannian immersions*, J. London Math. Soc., (2) **3** (1971) 307–310.

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1　熊本大学大学院自然科学研究科

E-mail address: ando@math.sci.kumamoto-u.ac.jp

〒 228-8555 神奈川県相模原市北里 1-15-1　北里大学一般教育部

E-mail address: tetsuya@kitasato-u.ac.jp